Exercice 11 1. On note F, la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle W, i.e. $F(z) = \mathbb{P}(W \leq z)$. Montrer que F est (toujours!) continue à droite. A quelle condition F est elle continue en un point z ?

2. Montrer que si u et w sont deux nombres réels positifs, on a $\int_0^u \mathbf{1}_{\{w \leq z\}} dz = (u-w)_+$. En déduire que, si W est une variable aléatoire positive :
$$\mathbb{E}\left((u-W)_+\right) = \int_0^u F(z)dz,$$
où $F(z) = \mathbb{P}(W \leq z)$ est la fonction de répartition de W.

Exercice 12 On suppose que c_M, c et c_S sont des nombres réels positifs et W une variable aléatoire positive. On définit, comme dans le cours, la perte moyenne résultant d'une commande en quantité u positive
$$J(u) = \mathbb{E}\left[c_F \mathbf{1}_{\{u>0\}} + cu + c_S(u-W)_+ + c_M(W-u)_+\right].$$

1. Vérifier que $J(u) = c_F \mathbf{1}_{\{u>0\}} + c_M \mathbb{E}(W) + (c - c_M)u + (c_M + c_S)\mathbb{E}\left((u-W)_+\right)$.
2. Montrer que $J(u) = c_M \mathbb{E}(W) + (c - c_M)u + (c_M + c_S) \int_0^u F(z)dz$ et que J est continue et admet une dérivée à droite en tout point.
3. On pose
$$u^* = \inf\left\{z \in \mathbb{R}^+, F(z) \geq \frac{c_M - c}{c_M + c_S}\right\}.$$
Montrez que, si W ne prend que des valeurs entières strictement positives, u^* prend lui aussi une valeur entière strictement positive.
4. Montrez que, si $c_M > c$, alors $u^* > 0$ et J est décroissante lorsque $u \in [0, u^*]$ et croissante si $u \geq u^*$ (elle atteint donc son minimum en u^*).
5. Montrer que si $c_M \leq c$ alors J est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ (elle atteint donc son minimum en 0).

Exercice 13 On s'intéresse maintenant à la fonction (dépendant de x) $\tilde{J}^x$, représentant la perte moyenne lorsque le stock initial est égal à x, définie par
$$\tilde{J}^x(u) = \mathbb{E}\left[c_F \mathbf{1}_{\{u>0\}} + cu + c_S(x+u-W)_+ + c_M(W-x-u)_+\right].$$

1. Vérifier que $\tilde{J}^x(u) = c_F \mathbf{1}_{\{u>0\}} + J(u+x) - cx$.

On suppose dans la suite que $c_M > c$. On note S pour l'unique point qui réalise $\mathrm{argmin}_{u \geq 0} J(u)$.

2. Lorsque $x \geq S$, vérifier que pour tout $u > 0$ $\tilde{J}^x(0) \leq \tilde{J}^x(u)$. *Il est optimal de ne rien commander.*
3. Lorsque $x \leq S$ et $J(x) < c_F + J(S)$, vérifier que pour tout $u > 0$ $\tilde{J}^x(0) \leq \tilde{J}^x(u)$. *Il est, là aussi, optimal de ne rien commander.*
4. Lorsque $x \leq S$ et $J(x) > c_F + J(S)$, vérifier que pour tout $u > 0$ $\tilde{J}^x(u) \geq \tilde{J}^x(S-x)$. *Il est optimal de commander la quantité $S - x$.*
5. On définit s par (notez que s est forcément inférieur à S par définition)
$$s = \sup\left\{z \leq S, J(z) \geq c_F + J(S)\right\}.$$
Vérifier que, pour $x \leq S$, $J(x) \geq c_F + J(S)$ est équivalent à $x \leq s$. En déduire que la commande optimale $u^*(x)$ partant d'un stock initial x est donnée par
$$u^*(x) = (S-x)\mathbf{1}_{\{x \leq s\}}.$$